



TITLE:

# Local Profile of mild solutions in 2D symmetric domains(Solutions for Nonlinear Elliptic Equations)

AUTHOR(S):

中根, 静男

---

CITATION:

中根, 静男. Local Profile of mild solutions in 2D symmetric domains(Solutions for Nonlinear Elliptic Equations). 数理解析研究所講究録 1989, 679: 202-209

ISSUE DATE:

1989-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101068>

RIGHT:

## Local Profile of mild solutions in 2D symmetric domains

東京工芸大 中根静男 (Shizuo Nakane)

この講演は都立大の鈴木貴氏との共同研究に基づいている。

### §1 序

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^N$  の有界領域で境界  $\partial\Omega$  は滑らかとし、 $\mathbb{R}$  の境界値問題を考える：

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u), & u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  とする。我々が興味があるのは、特に、 $\Omega$  が超平面  $\Gamma = \{x \cdot \nu = 0\}$  に関して対称な場合である。この場合には Gidas-Ni-Nirenberg により有名な結果が知られている。それは次の問に対する回答である：

(Q1) (1) の解は  $\Gamma$  に関して対称か？

$$\pm z, \quad T(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^N; \quad x \cdot \gamma = \delta\}$$

$$\delta^* = \sup \{ \delta; T(\delta) \cap \Omega \neq \emptyset \} \quad \text{と置く.}$$

定義  $\Omega$  が次を満たすとき,  $T$  に関して GNN symm. という.

(i)  $\Omega$  は  $T$  に関して対称.

(ii)  $0 < \forall \delta < \delta^*$  に対し,  $\{x \in \Omega; x \cdot \gamma > \delta\}$  の  $T$  に関する鏡映は  $\Omega$  に含まれる.

(iii)  $\forall \delta < \delta^*$  に対し,  $T(\delta)$  は  $\partial\Omega$  と直交しない.

このとき次が得られる.

定理 0 (Gidas-Ni-Nirenberg [2])

$\Omega$  が GNN symm. ならば (i) の解はすべて  $T$  に関して対称, しかも,  $\forall x \in \Omega, \quad \gamma \cdot \nabla u < 0$ .

例  $g(z) = g_R(z) = \frac{1-R^2}{2} \left( \frac{1}{z-R} + \frac{1}{z+R} \right), \quad R > 1.$

$$\mathbb{C}_2 \supset \Omega = \Omega_R = g(D), \quad D = \{ |z| < 1 \}$$

$z = x_1 + ix_2$  により,  $\mathbb{R}^2$  と  $\mathbb{C}$  を同一視すると,  $\Omega$  は  $x_1$ -軸と  $x_2$ -軸に関して対称。次が成り立つ。

$\forall R > 1$  に対し,  $\Omega$  は  $x_1$ -軸に関して GNN symm.

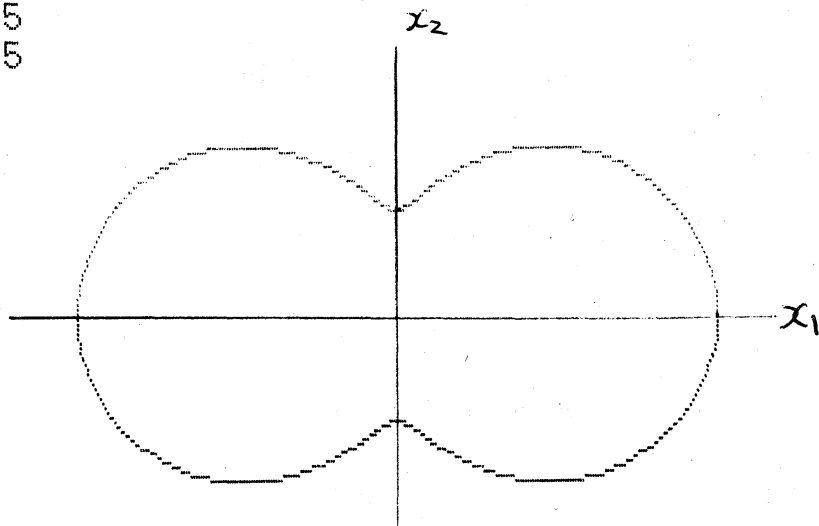
$$\Omega \text{ が } x_2 \text{ 軸に関して GNN symm.} \iff R > 1 + \sqrt{2}$$

実際,  $R < \sqrt{2}$  のとき,  $f(u) = \lambda e^u \quad \lambda \ll 1$  に対し, Weston-

Moseley 理論により, 非対称な large solution の存在が示す

れる。  $r = R^2 = 2$  と  $\Omega$  を図示すると下のようになる。

$$\begin{array}{rcl} r = & & 2 \\ x_S = & & -1.5 \\ x_E = & & 1.5 \\ y_S = & & -1.5 \\ y_E = & & 1.5 \end{array}$$



しかし、GNN symm. でなくとも (Q1) が肯定的に答えられるような対称領域は色々存在する。

例 1.  $f(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  : 単調非増加 とすると、(1) の解は unique。故に解は  $\Gamma$  に對し対称。

例 2.  $-\Delta u = \lambda f(u)$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $f''(t) > 0$  ( $t > 0$ )

$\alpha$  と  $\beta$ ,  $\bar{\lambda} > 0$  が存在し、  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  に対し、unique に minimal solution が存在する。この minimal solution も対称になる。(Crandall-Rabinowitz [1] 参照。)

我々の主たる関心は次の問題である。

(Q2) (1) の対称解は  $\Gamma$  の  $\Omega$  上で最大値をとるか? 更に、この曲線に沿って解は減少するか?

定理 0 は  $\Omega$  が GNN symm. のとき, (Q2) に対し肯定的な回答を与えている。我々は  $\mathbb{R}^2$  内の non GNN symm. な領域  $\Omega$  を考える。

定義. (1) の解  $u$  が次を満たすとき mild とする。

$$(2) \quad \lambda_2(u) > 0$$

但し,  $-\infty < \lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots$  は  $-\Delta - f'(u)$  の  $L^2(\Omega)$  での固有値を表わす。

先の例 1, 2 の対称解はすべて mild であることを示される。

## § 2. 主定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  を有界単連結領域

$$f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$$

$$T = x_1 \text{ 軸}$$

とする。Riemann の写像定理により, 等角写像  $g: D = \{z \mid |z| < 1\}$

$\rightarrow \Omega$  として  $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$  を満たすものが存在する。こ

こで  $\mathbb{R}^2 \ni \mathbb{C}$  と同一視している。今, この  $g$  に対し,

$$(3) \quad h_+(z) = (1+z^2) \frac{g''(z)}{g'(z)} + 2z$$

とおき, 次を仮定する。

$$(H) \quad \operatorname{Im} \zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_+(z) > 0$$

この仮定は  $\Omega$  の幾何学的性質を規定するものである。このとき、次の主定理を得る。

定理 1  $(H)$  を仮定すると、(1) の mild な対称解  $u$  は  $T \cap \Omega$  上で最大値をとる。更に、 $\zeta(t)$  を  $g^{-1}(T)$  から出る、ベクトル場  $\nu(z) = \sqrt{1+z^2}$  の積分曲線、 $z(t) = g(\zeta(t))$  とおくと、 $u$  は曲線  $z(t)$  に沿って減少する。

注意 実は、 $\Omega$  に対し Riemann 写像  $g$  は unique でない。そして、 $(H)$  も  $g$  のとり方に依存する。実際、 $g$  のかわりに、 $g_a(z) = g \circ \varphi_a(z)$ ,  $\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$  ( $-1 < a < 1$ ) とすると成り立つ。このとき、 $(H)$  は、次のように書ける：

$$(H.a) \quad \operatorname{Im} \zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_a(z) > 0$$

$$\text{但し、} h_a(z) \equiv \left(1 - \frac{4a}{a^2+1} z + z^2\right) \frac{g'(z)}{g(z)} + 2z. \quad (g = g_0)$$

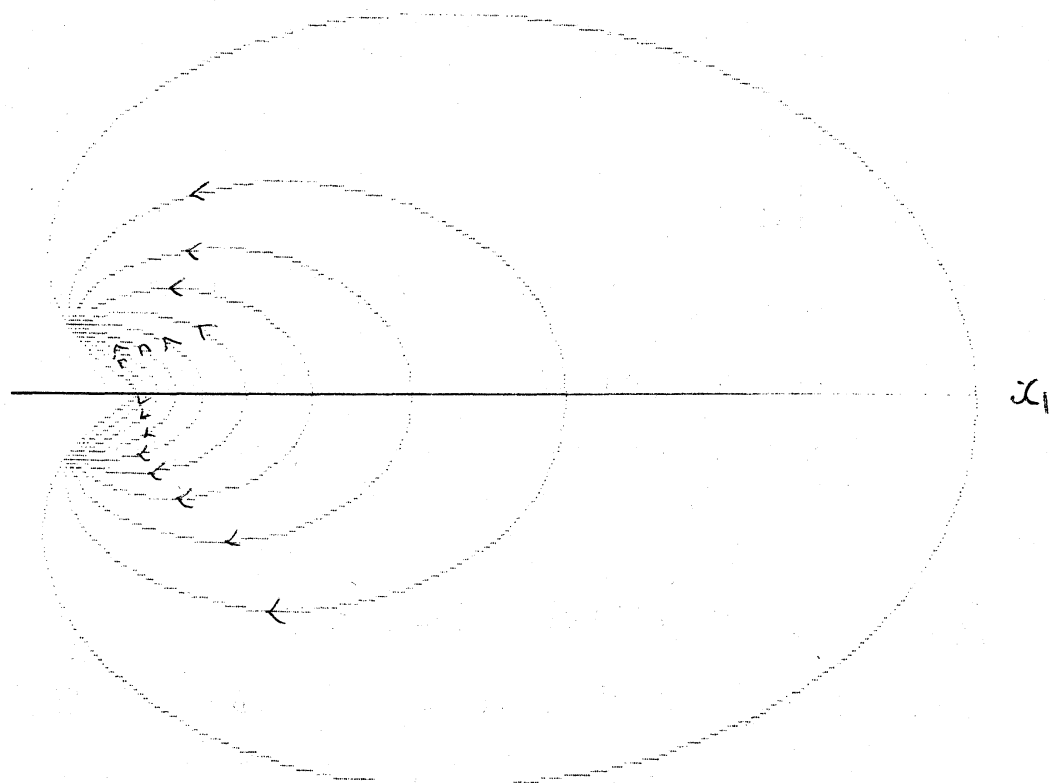
例  $g(z) = (R+z)^k$  ( $R > 1$ ) とする。次が言える：

$$g : \text{univalent} \iff R > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k+1}}.$$

$\Omega : \text{convex} \iff R \geq k+1. \iff \Omega : \text{GNN symm.}$

しかし,  $\forall R > 1$ , 対し,  $a$  を  $-1$  に十分近くとれば,  $(H, a)$  が成り立つ.  $\Omega$  及び,  $z(t)$  を図示すると次のようになる.

graph of  $g(z) = (r+z)^3$   
 $r = 1.5$   
 $a = -.3$



矢印のついた曲線にそって  $u$  は減少する.

### 定理1の証明の方針

$$\varphi_z(z) \equiv \frac{5+z}{1+\bar{z}5}, \quad g_z \equiv g \circ \varphi_z : D \rightarrow \Omega$$

と置く. (1)の解  $u$  に対し,  $u_z(z) \equiv u \circ \varphi_z(z)$  は, 次の境界値問題の解になる:

$$\begin{cases} -\Delta v_z = p_z^2(z) f(v_z) & \text{in } D \\ v_z = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

但し,  $p_z(z) \equiv |g'_z(z)|$ . 又  $\omega = \sqrt{-1}$ ,  $W = \frac{2}{2\pi} |r_{rw}|_{r=0}$  とおくと,  $W$  は次を満たす。

$$\begin{cases} (-\Delta - p_0^2 f'(v_0)) W = -\operatorname{Im} h(z) \cdot p_0^2 f(v_0) < 0 \\ W|_{\partial D_+} = 0 \end{cases} \quad \text{in } D_+ = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$$

又 mildness より,  $-\Delta - p_0^2 f'(v_0)$  は  $D_+$  上 positive。  
故に, maximum principle より,  $W < 0$  in  $D_+$ 。  
 $\therefore \frac{d}{dt} u(z(t)) < 0$ 。これより定理が従う。

### §3 mild な対称解の level set

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  は更に,  $x_1$ -B.W.  $x_2$ -軸に関して対称である。すなわち, Riemann 写像  $g: D \rightarrow \Omega$  といて,

$$g(-z) = -g(z), \quad g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$$

を満たすものがとれる。  $h_{\pm}(z) \equiv (z^2 \pm 1) \frac{g'(z)}{g(z)} + 2z$  といて, 次を仮定する:

$$(H') \quad \begin{cases} \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_+(z) > 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} h_-(z) > 0 \end{cases}$$



このとき、次の定理を得る。

定理2  $\Omega$  は原点に関して starshaped とする。このとき、 $(H')$  の下で、(1) の mild な対称解  $u$  に対し、その level set  $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) > c\}$  は原点に関して starshaped。

詳細は Chen - Nakane - Suzuki [3] を参照された。

### 文 献

- [1] Crandall, M.G - Rabinowitz, P : Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 58 (1975). 207-218.
  - [2] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L : Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68 (1979) 209-403.
  - [3] Chen, Y.-G., Nakane, S., Suzuki, T. : Elliptic equations on 2D symmetric domains: Local profile of mild solutions. preprint.
- 及び、[3] の References を参照された。